УДК 681.5.015

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА–ШМИДТА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭКОНОМИЧНОСТИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕКУРРЕНТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

А.Е. Карелин, А.А. Светлаков

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: kae@iit.tusur.ru

*Показано что применение ортогонализации Грама-Шмидта векторов измеренных значений при рекуррентном оценивании параметров модели объекта управления позволяет сократить количество арифметических операций за счет отказа от процедуры псевдообращения получаемой матрицы. На каждой итерации алгоритма оценивания необходима ортогонализация только одного текущего вектора измеренных значений. Такой подход приводит к существенному повышению быстродействия алгоритма оценивания.*

## 1. Введение

Как известно [1, 2], наряду со скоростью сходимости и помехоустойчивостью важнейшим свойством рекуррентных алгоритмов оценивания параметров линейных и нелинейных моделей объектов управления является их экономичность, характеризующаяся количеством арифметических операций над вещественными числами, необходимых для реализации одной итерации уточнения оценок параметров идентифицируемых моделей. Особенно актуальным требование экономичности данных алгоритмов оказывается в тех случаях, когда выделяемое на их реализацию время в одном такте функционирования системы управления является в значительной мере ограниченным. С подобного рода ситуациями неизбежно приходится сталкиваться, например, в тех случаях, когда управляемым объектом является некоторый быстропротекающий процесс, для эффективного управления которым требуется достаточно высокая частота контроля его состояний и коррекция управляющих воздействий. Аналогичные ситуации возникают и в тех случаях, когда управляемый объект не является каким-либо быстропротекающим процессом, но для коррекции управляющих воздействий требуются значительные затраты машинного времени. Последнее же, очевидно, может иметь место из-за недостаточно высокого быстродействия используемой в системе ЭВМ, либо из-за значительных объемов вычислений, необходимых для нахождения новых управляющих воздействий и других задач, решаемых системой управления. Обе эти ситуации являются достаточно типичными при разработке автоматизированных систем управления, базирующихся на мини- и микроЭВМ, быстродействие которых, как правило, не столь велико, как это часто бывает необходимо.

В данной работе предлагается модификация многоточечного рекуррентного алгоритма оценивания параметров моделей линейных статических объектов управления, основанного на использовании псевдообратных матриц, требующая для своей реализации существенно меньших объемов вычислений, чем это необходимо для реализации модифицируемого алгоритма. Значительное сокращение объемов вычислений здесь удается добиться за счет ортогонализации измерений входных переменных объекта с применением хорошо известной процедуры Грама-Шмидта ортогонализации векторов [3, 4].

## 2. Постановка задачи рекуррентного оценивания параметров математических моделей объекта и описание алгоритма ее решения, основанного на использовании псевдообратных матриц

Задачу рекуррентного оценивания параметров модели управляемого объекта сформулируем следующим образом. Пусть имеется линейный статический объект, значения $n$-мерного входа и скалярного выхода которого связаны соотношением

$$y_t = \left(\vec{x}_t, \overset{\downarrow}{\alpha}\right), \qquad (1)$$

где $\vec{x}_t = (x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tn})$, $y_t$ – соответственно значения входа $x$ и выхода $y$ в момент времени $t$; $\overset{\downarrow}{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ – $n$-мерный вектор неизвестных параметров; $T$ – символ транспонирования векторов и матриц; $n$ – конечное натуральное число. Пусть, далее, в каждый момент времени $t$ имеются измерения вида

$$X_t = \begin{pmatrix} \vec{x}_t \\ \vec{x}_{t-1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{t-l+1} \end{pmatrix} \quad и \quad \overset{\downarrow}{y}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-l+1} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $X_t, \overset{\downarrow}{y}_t$ – соответственно $(l\times n)$-матрица и $l$-мерный вектор измерений входа $x$ и выхода $y$ объекта; $l$ – глубина памяти алгоритма – некоторое натуральное число, такое, что $1\le l\le M$; $M$ – конечное натуральное число, которое может быть как больше, так и меньше числа $n$. Задача рекуррентного оценивания параметров модели объекта при каждом $t$ заключается в том, чтобы получить новые оценки $\overset{\downarrow}{a}_t$ параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$ модели (1) на основе измерений (2) и уже имеющихся к моменту $t$ оценок $\overset{\downarrow}{a}_{t-1}$ данных параметров, полученных на предшествующем ($t$–1)-м такте оценивания.

Приведенная постановка задачи рекуррентного оценивания параметров модели является одной из простейших задач идентификации математических моделей управляемых объектов. Вместе с тем с точки зрения практических приложений именно она имеет важнейшее значение и представляет первостепенный интерес. Это обуславливается, во-первых, тем, что количественные связи между переменными многих реальных объектов имеют линейный или весьма близкий к нему характер и, следовательно, с достаточно высокой точностью могут быть описаны моделями вида (1). Во-вторых, достаточно типичной является ситуация, когда исследуемым объектом является реальный технологический процесс, значения переменных которого изменяются в достаточно узких пределах, и поэтому, если под значениями $y_i$ и $\vec{x}_i$ понимать не значения переменных $y$ и $\vec{x}$, а их отклонения от некоторых фиксированных, например, номинальных или средних значений, то количественные связи между данными отклонениями можно, очевидно, также с достаточно высокой точностью описать моделями вида (1), несмотря на заведомо нелинейные зависимости между значениями переменных $y$ и $\vec{x}$. И, наконец, в-третьих, с помощью тех или иных взаимнооднозначных функциональных преобразований переменных $y$ и $\vec{x}$ достаточно часто удается перейти к переменным $y'$ и $\vec{x}'$, количественные связи между которыми адекватно описываются моделями (1).

В настоящее время существует целый ряд алгоритмов, позволяющих осуществлять ее решение [2]. Одним из них является многоточечный рекуррентный алгоритм оценивания параметров линейных моделей (1), основанный на применении псевдобратных матриц [5], который имеет вид

$$\overset{\downarrow}{a}_t = \overset{\downarrow}{a}_{t-1} + \overset{+}{X}_t(\overset{\downarrow}{y}_t - X_t\,\overset{\downarrow}{a}_{t-1}), \qquad (3)$$

где $\overset{+}{X}_t$ – $(l\times n)$-матрица, псевдобратная к матрице $X_t$. Алгоритм вычисления данной матрицы в каждый дискретный момент времени $t$ составляют следующие операции:

$$\overset{+}{X}_1 = \vec{x}_t^{+} = \vec{x}_t^{T}(\vec{x}_t, \vec{x}_t)^{-1}, \qquad (4)$$

$$\overset{+}{X}_k = \left( \overset{+}{X}_{k-1} \middle| \overset{\downarrow}{0}_n \right) -$$

$$-\begin{cases} (\vec{x}_k - \vec{z}_k\,X_{k-1})^{+}(\vec{z}_k\,|-1), \vec{x}_k \ne \vec{z}_k\,X_{k-1} \\ (1+(\vec{z}_k,\vec{z}_k))^{-1}\,\overset{+}{X}_{k-1}\,\vec{z}_k^{T}(\vec{z}_k\,|-1), \vec{x}_k = \vec{z}_k\,X_{k-1}, k=\overline{1,l} \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\vec{x}_k$ – $k$-я строка матрицы $X_t$; $X_k$ – матрица размерности $(k\times n)$, составленная из первых $k$ строк матрицы $X_t$; $\overset{+}{X}_k$ – псевдобратная к $X_k$ матрица, $\vec{z}_k = \vec{x}_k\,\overset{+}{X}_{k-1}$, $\overset{\downarrow}{0}_n$ – нулевой $n$-мерный вектор.

Основные свойства алгоритма (3) изложены в [2, 6] и сводятся к следующему.

1) Глубина памяти $l$ может быть меньше или равна размерности $n$ вектора параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$ модели (1) либо больше ее. Данное свойство является следствием того, что псевдобратная матрица $\overset{+}{X}_t$ существует при произвольных соотношениях между $l$ и $n$, что открывает широкие возможности выбора глубины памяти $l$. Выбирая глубину памяти, можно обеспечить эффективное применение алгоритма.
2) Необходимым и достаточным условием сходимости оценок $\overset{\downarrow}{a}_t$, $t$=1,2,3..., вычисляемых с помощью алгоритма (3), является линейная независимость измерения $\vec{x}_t$ от предшествующих $l$–1 измерений входа и выхода объекта.
3) Последовательность оценок $\overset{\downarrow}{a}_t$, вычисляемых с помощью данного алгоритма, является монотонно по евклидовой норме сходящейся к истинным значениям параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$.
4) Сходимость оценок $\overset{\downarrow}{a}_t$ имеет место при произвольных начальных оценках $\overset{\downarrow}{a}_0$ параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$.
5) Скорость сходимости алгоритма (3) монотонно увеличивается с увеличением глубины памяти и ее изменении в пределах от $l$=1 до $l$=$n$.

6) Имеются возможности повышения помехоустойчивости рассматриваемого алгоритма за счет регуляризации алгоритма (4), (5) вычисления матриц $\overset{+}{X}_t$ [2,7].

7) Количество арифметических операций, выполняемых на одном такте уточнения оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$, определяется следующими соотношениями:

$$\text{а) } N_c = 0,5(3n-1)(l+1),$$

$$\text{б) } N_y = 0,5n(3l+5)l \quad \text{и} \quad \text{в) } N_д = l, \qquad (6)$$

где $N_c$, $N_y$ и $N_д$ – соответственно, количество операций сложения, умножения и деления вещественных чисел.

### 3. Модификация многоточечного рекуррентного алгоритма (3) на основе использования ортогонализации измерений

Как показано в работах [2, 6], трудоемкость реализации одного такта подстройки оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_{t-1}$ параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$ модели (1) в соответствии с многоточечным алгоритмом (3) характеризуется соотношениями (6). Непосредственный подсчет количества арифметических операций, необходимых для реализации формул (4)–(5) позволяет получить соотношения

$$\text{а) } \overset{+}{N}_c = 0,5((3l-1)n-l-1)l,$$

$$\text{б) } \overset{+}{N}_y = 0,5n(3l+1)l \quad \text{и} \quad \text{в) } \overset{+}{N}_д = l, \qquad (7)$$

где символами $\overset{+}{N}_c, \overset{+}{N}_y, \overset{+}{N}_д$ обозначены соответственно количество операций сложения, умножения и деления вещественных чисел.

Сопоставляя полученные соотношения с (6), можно видеть, что подавляющая часть вычислений при вычислении оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$ в соответствии с алгоритмом (3) затрачивается на вычисление псевдообратной матрицы $\overset{+}{X}_t$. Вместе с тем, сравнивая измерения (2) на ($t$–1)-м и $t$-м тактах оценивания, можно видеть, что только первая строка $\vec{x}_t$ (компонента $y_t$) матрицы $X_t$ (вектора $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{y}}_t$) является новой, а остальные ее строки (его компоненты) являются строками (компонентами) матрицы $X_{t-1}$ (вектора $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{y}}_{t-1}$). Отмеченные обстоятельства наводят на мысль организовать вычисление $\overset{+}{X}_t$ так, чтобы в максимально возможной мере использовать результаты, полученные при вычислении $\overset{+}{X}_{t-1}$, и за счет этого сократить объем вычислений на каждом такте оценивания параметров модели (1). Имеется по крайней мере два способа реализации данной идеи. Первый из них заключается в том, чтобы выделить в матрицах $X_t$ и $X_{t-1}$ блок строк, входящих одновременно в обе матрицы, т. е. представить их в виде

$$\boldsymbol{X}_{t-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{t-1} \\ \dots \\ \vec{\boldsymbol{x}}_{t-l-2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X}_t = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_t \\ \dots \\ \boldsymbol{B}_{t-1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B}_{t-1} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_{t-1} \\ \dots \\ \vec{\boldsymbol{x}}_{t-l} \end{pmatrix}$$

и воспользоваться правилами псевдообращения блочных матриц.

Вторая из обсуждаемых возможностей, реализованная в данной работе, состоит в том, чтобы воспользоваться каким-либо способом ортогонализации строк матрицы $X_t$, $t$=1,2,3,... Для этих целей, в частности, можно воспользоваться известной процедурой Грама-Шмидта ортогонализации заданной совокупности векторов. В результате применения данной процедуры к строкам матрицы $X_t$ и объединения ее с алгоритмом (3) получаем модифицированный многоточечный алгоритм, имеющий следующий вид:

$$\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}_t = \vec{\boldsymbol{x}}_t + \sum_{i=1}^{L} (\vec{\boldsymbol{x}}_t, \vec{\boldsymbol{w}}_i)\vec{\boldsymbol{w}}_{i-1}, \qquad (8)$$

$$\vec{\boldsymbol{w}}_i = \vec{\boldsymbol{v}}_i \big/ \|\vec{\boldsymbol{v}}_i\|, \qquad (9)$$

$$\theta_t = [y_t - \sum_{i=1}^{L} (\vec{\boldsymbol{x}}_t, \vec{\boldsymbol{w}}_{i-1})\theta_{i-1}] \Big/ \|\vec{\boldsymbol{v}}_i\|, \qquad (10)$$

$$\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t = \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_{t-1} + \vec{\boldsymbol{w}}_t^T [\theta_t - (\overset{\downarrow}{\boldsymbol{w}}_t, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_{t-1})], \ t = 1,2,..., \qquad (11)$$

где верхний предел суммирования $L$ определяется соотношением

$$L = \begin{cases} t-1, \ t = 1,2,...,l-1, \\ l-1, \ t = 1, l+1,... \ . \end{cases}$$

Здесь $\|\vec{v}_t\|$ – евклидова норма вектора $\vec{v}_t$, вычисляемая в соответствии с равенством $\|\vec{\boldsymbol{v}}_t\| = \left( \sum_{j=1}^{n} v_{tj}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Из соотношений (8)–(11) видно, что на первых $l$–1 тактах оценивания параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$ осуществляется накопление измерений (2) и их ортонормирование, а на каждом из последующих тактов – сдвиг $l$ ранее поступивших измерений с вычеркиванием самого «старого», т. е. ($t$–$l$)-го измерения и ортонормирование самого «нового» $t$-го измерения по отношению к остальным $t$–$l$+1 имеющимся измерениям. Поскольку сдвиг измерений и вычеркивание одного из них из ортонормированной совокупности не нарушает ортонормированности остающихся в ней измерений, то в обоих случаях необходимо ортонормировать только одно вновь поступающее измерение $\vec{\boldsymbol{x}}_t$. Непосредственная коррекция оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_{t-1}$ в этом случае также существенно упрощается. Общий объем вычислений, выполняемых на одном такте в установившемся режиме оценивания (при $t$≥$l$), в данном случае характеризуется следующими соотношениями:

$$N_c = (2l+1)n,\ N_y = (3n+1)l,\ N_д = 1. \qquad (12)$$

Сопоставляя данные соотношения с (6) и (7), можно видеть, что применение ортонормирования измерений (2) существенно сокращает объем вычислений. Так, зависимость величин $N_c$ и $N_y$ от глубины памяти $l$ в (4) является квадратичной, а в (12) она имеет линейный характер. Значение же $N_д$ в (12) вообще не зависит от значения $l$, а в соотношениях (6) значение $N_д$ равно $l$.

Заметим, что сравнение экономичности алгоритмов здесь производится на основе сопоставления количества арифметических операций, выполнение которых необходимо для реализации одного такта подстройки параметров идентифицируемой модели в соответствии со сравниваемыми алгоритмами. Подход к сравнению экономичности алгоритмов на основе отмеченных выше критериев корректен лишь при использовании данных алгоритмов в следящих режимах оценивания [1, 2], когда скорости их сходимости примерно равны. Сравнение же алгоритмов по данным критериям при использовании режима обучения не вполне корректно, так как в этих режимах они имеют существенно различные скорости сходимости. В подобных ситуациях более корректным было бы сравнение экономичности алгоритмов по суммарному количеству арифметических операций, необходимых для реализации процесса подстройки параметров в целом, продолжающегося с первого такта оценивания и, например, до тех пор, пока не будет достигнута заранее заданная точность оценок.

Однако использование такого подхода к оценке экономичности рекуррентных алгоритмов оценивания возможно лишь в некоторых частных случаях и по результатам экспериментальных исследований в одних и тех же условиях. В общем же случае его применение связано со значительными трудностями, так как скорость сходимости данных алгоритмов определяется не только их свойствами, но и свойствами измерений на каждом из тактов оценивания, и, прежде всего, теснотой линейной зависимости между ними и их точностью.

Как видно из представленных выше результатов, использование ортогонализации измерений переменных объекта в значительной мере изменяет структуру алгоритма (3) и позволяет существенно повысить его экономичность. Изменяются при этом и некоторые другие свойства данного алгоритма. В частности, глубина памяти $l$ алгоритма (8)–(11) не может быть больше $n$. Однако многие свойства алгоритма (3) при этом сохраняются и полностью наследуются алгоритмом (8)–(11). В частности, полностью сохраняются такие его важнейшие свойства, как сходимость при произвольных начальных оценках $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_0$ и любом значении $l$, удовлетворяющем отмеченным выше ограничениям, а также монотонность сходимости по евклидовой норме оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$ к $\overset{\downarrow}{\alpha}$ при $t\to\infty$. Справедливость всех этих свойств легко устанавливается с помощью тех же самых рассуждений и приемов, которые были использованы при исследовании алгоритма (8)–(11) с увеличением его глубины памяти $l$ в пределах от 1 до $n$. Справедливость данного свойства становится совершенно очевидной, если иметь в виду, что в случае ортогональных и точных измерений переменных объекта для получения вектора $\overset{\downarrow}{\alpha}$ нужно использовать не более чем $n$ измерений.

**Заключение**

Результаты многочисленных экспериментальных исследований алгоритма (8)–(11), выполненных в тех же условиях, что и исследования алгоритма (3), достаточно подробно рассмотрены в [7]. Отметим следующие основные выводы, вытекающие из данных результатов. Во-первых, они иллюстрируют работоспособность исследуемого алгоритма и подтверждают наличие у него всех отмеченных выше свойств. Во-вторых, при малых глубинах памяти ($l\leq5$) алгоритм является устойчивым по отношению к ошибкам измерений переменных объекта. В-третьих, при более значительных глубинах памяти ($l\geq6$) на некоторых тактах оценивания наблюдаются случаи неустойчивого поведения алгоритма, когда оценки $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$ оказываются более удаленными от $\overset{\downarrow}{\alpha}$, чем оценки $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_{t-1}$. В-четвертых, неустойчивость алгоритма легко устраняется с помощью его регуляризации, осуществляемой заменой множителя $\|\vec{v}_t\|^{-1}$ в формулах (9) и (10) множителем $(\|\vec{v}_t\|+r)^{-1}$, где $r$ – параметр регуляризации, что в вычислительном отношении незначительно усложняет весь алгоритм. Наконец, в-пятых, наличие у алгоритма регулируемой глубины памяти $l$ и параметра регуляризации $r$ позволяет в каждом конкретном случае подбирать их значения таким образом, чтобы обеспечить желаемое быстродействие и помехоустойчивость алгоритма. Проблема выбора оптимальных значений параметра регуляризации и глубины памяти алгоритма требует проведения дополнительных теоретических и экспериментальных исследований и выходит за рамки настоящей статьи. Здесь мы отметим лишь следующее. Как можно меньшее значение глубины памяти $l$ следует выбирать в случае, когда необходимо обеспечить максимальное быстродействии и более высокую помехоустойчивость алгоритма. Значение же параметра регуляризации $r$ на начальных тактах оценивания параметров модели управляемого объекта следует устанавливать равным нулю или достаточно близким к нему. А на последующих этапах подстройки оценок $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$, т. е. при $t>n$, когда оценки $\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}_t$ оказываются близкими к истинным значениям параметров $\overset{\downarrow}{\alpha}$, значение $r$ должно быть отличным от нуля и тем в большей мере, чем большую помехоустойчивость необходимо обеспечить.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей производства. – М.: Энергия, 1975. – 376 с.
2. Светлаков А.А. Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
6. Светлаков А.А. Многошаговый алгоритм адаптивного оценивания моделей линейных статических объектов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 3. – С. 187–191.
7. Светлаков А.А. Адаптивный алгоритм идентификации с регулируемыми параметрами // Корреляционно-экстремальные системы управления. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. – Вып. 5. – С. 115–124.

УДК 681.5